• Δίνεται η ακολουθία $a_{\nu+1} = \dfrac{4+3a_\nu}{3+2a_\nu}$ και $a_1 = 1$

i) Να εξεταστεί εάν η ακολουθία $a_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ συγκλίνει

ii) Αν $\exists \lim a_\nu$, να βρεθεί

iii) Να υπολογιστεί το $\sup\{a_\nu : \nu \in \mathbb{N}\}$

ΛΥΣΗ

i) Έχουμε ότι $a_1 = 1 < 2$

Μέσω μαθηματικής επαγωγής, έστω $a_\nu < 2$ και θδο $a_{\nu+1} < 2$, $\forall \nu \in \mathbb{N}$

$$2 - a_{\nu+1} = 2 - \frac{4+3a_\nu}{3+2a_\nu} = \frac{2-a_\nu}{3+2a_\nu} \quad (1)$$

• $a_\nu < 2 \Rightarrow 2 - a_\nu > 0$

• $a_\nu < 2 \Rightarrow 2a_\nu + 3 < 7 \Rightarrow \dfrac{1}{2a_\nu+3} > \dfrac{1}{7} > 0$.

Άρα, στη σχέση (1) βλέπουμε ότι:

$2 - a_{\nu+1} > 0 \Rightarrow a_{\nu+1} < 2$. Άρα η $a_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ $\uparrow$

Αρκεί, νδο η $a_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ είναι και φραγμένη

$$a_\nu = \frac{3a_\nu+4}{2a_\nu+3} = \frac{\frac{3}{2}(2a_\nu+3)+4-\frac{9}{2}}{2a_\nu+3} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2(2a_\nu+3)} < \frac{3}{2}$$

Άρα, $a_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ φραγμένη. Συνεπώς, η $a_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ συγκλίνουσα

ii) Έστω $\lim a_\nu = \ell$ και $\lim a_{\nu+1} = \ell$ όντας υπακολουθία της αρχικής ακολουθίας.

$$a_{\nu+1} = \frac{4+3a_\nu}{3+2a_\nu} \Rightarrow \lim a_{\nu+1} = \frac{4+3\cdot\lim a_\nu}{3+2\cdot\lim a_\nu} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ell = \frac{4+3\ell}{3+2\ell} \Rightarrow \ell = \sqrt{2}$$

iii) Αν $a_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ αύξουσα και φραγμένη, τότε

$\lim a_\nu = \sup\{a_\nu : \nu \in \mathbb{N}\} = \sqrt{2}$.

• Δίνεται η ακολουθία $5a_{\nu+1} = a_\nu^2 + 6$ με $a_1 = \frac{5}{2}$.
Να εξεταστεί ως προς την σύγκλιση της και έπειτα να βρεθεί το όριο της.

<u>ΛΥΣΗ</u>

Αρχικά νδο η $a_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ φραγμένη και μονότονη

$2 < a_1 < 3$ Έστω $2 < a_\nu < 3$ και θδο $2 < a_{\nu+1} < 3$

Υποθέσαμε ότι $2 < a_\nu < 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4 < a_\nu^2 < 9 \Rightarrow 10 < a_\nu^2 + 6 < 15 \Rightarrow 2 < \frac{1}{5}(a_\nu^2 + 6) < 3$

$\Rightarrow 2 < a_{\nu+1} < 3$ Άρα, μέσω επαγωγής δείξαμε ότι η ακολουθία, a_ν φραγμένη $\forall \nu \in \mathbb{N}$.

Τώρα, $a_{\nu+1} - a_\nu = \frac{1}{5}(a_\nu^2 + 6) - a_\nu = \frac{1}{5}(a_\nu^2 - 5a_\nu + 6) =$

$= \frac{1}{5}(a_\nu - 2)\cdot(a_\nu - 3) < 0$, Άρα, η $a_\nu, \nu \in \mathbb{N} \downarrow$

Επομένως, συγκλίνει

Η $a_{\nu+1}, \nu \in \mathbb{N}$ όντας υπακολουθία της $a_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ θα συγκλίνει στο ίδιο όριο με την $a_\nu, \nu \in \mathbb{N}$.

Έστω $\lim a_\nu = \ell = \lim a_{\nu+1}, \nu \in \mathbb{N}$

$a_{\nu+1} = \frac{1}{5}(a_\nu^2 + 6) \Rightarrow \lim a_{\nu+1} = \frac{1}{5} \lim (a_\nu^2 + 6) \Rightarrow$

$\Rightarrow \ell = \frac{1}{5}(\ell^2 + 6) \Rightarrow \underbrace{\ell = 2}_{\text{Δεκτή}}$ ή $\ell = 3$

Απορ. διότι $a_{\nu+1} - a_\nu < 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow a_{\nu+1} < a_\nu \Rightarrow \ell < a_\nu < 3$.